التمرين الأول:(04 نقاط)

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 10.

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $33^{16n+2}-2\times 109^{8n+1}-11\equiv 0[10]$

3) عين الأعداد الطبيعية n حيث: $7\times 3^{n+1}-1\equiv 0[10]$ و $10\prec n\leq 25$.

4) ليكن العدد A الذي يكتب على الشكل $\overline{xx02102}^{3}$ في نظام التعداد ذي الأساس 3 و يكتب في النظام ذي الأساس 9 بالشكل $\overline{y67y}^{9}$

أ) عين x و y.

ب) أحسب A في النظام العشري .

ث) أكتب A في النظام ذي الأساس 7.

التمرين الثاني :(04 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم و المتجانس المباشر $(O,\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و I التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-2$ ، $z_B=-1+i$ و $z_I=i$.

من أجل كل عدد مركب z حيث $z\neq -2$ نضع : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}$. حيث M صورة العدد المركب z و M' صورة العدد المركب z' .

1- أ) تحقق أن $z'=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$.

ب)بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فان النقطة M' تنتمي إلى دائرة (C) يطلب تعيين عناصر ها المميزة .

ج) عين طبيعة (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث يكون z' تخيليا صرفا .

2- أ) تحقق أن : $z'-i=\dfrac{1-i}{z+2}$

ب)استنتج أن : $IM'\times AM=\sqrt{2}$ و أن $(\vec{u},\overrightarrow{IM'})+(\vec{u},\overrightarrow{AM})\equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

ج) بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A و نصف القطر 1 فان النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها .

3- لتكن النقطة F ذات اللاحقة $z_F=-\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

أ)بين أن النقطة F تنتمي إلى (Γ) ثم بين أن $(\vec{u},\overrightarrow{AF})\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

ب) باستعمال نتائج السؤال 2) أنشئ النقطة F' المرفقة بالنقطة F .

التمرين الثالث :(04 نقاط)

$(u_n)_{n\in N}$ المتتالية المعرفة بحدها الاول $u_0=\frac{1}{5}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\langle u_n\langle\frac{1}{2}$

2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{5^n u_n}{2u_n-1}$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 10 ويطلب حساب حدها الاول v_0

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم بين أن : $u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}$. أحسب u_n $\lim\limits_{n\to+\infty}$

أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+...+\frac{1}{u_n}$

التمرين الرابع :(08نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$.

نسمي (C_f) النحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1- أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ب)بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

2- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

3-بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث، $1.8\prec\alpha\prec1.9$

4- أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

5- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

6- أحسب $f(0)$ ، $f(3)$ ثم أرسم (Δ) ،(T) و (C_f).

7- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x: $f(x)=x+m$.

II. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$.

1) أ) بين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x+1}$.

ب)أحسب I_1 .

2- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

ب)أحسب I_2 .

3- أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x=0$

التمرين الأول (04 نقط)

1- دراسة بواقي قسمة 3^n على 10 حسب قيم العدد الطبيعي n.

0,75 $3^0\equiv 1[10]$ ، $3^1\equiv 3[10]$

$3^2\equiv 9[10]$ ، $3^3\equiv 7[10]$

$3^4\equiv 1[10]$

$3^{4k}\equiv 1[10]$ ، $3^{4k+1}\equiv 3[10]$

0,5 $3^{4k+2}\equiv 9[10]$ ، $3^{4k+3}\equiv 7[10]$

$(k\in\mathbb{N})$

2- $33\equiv 3[10]$ ومنه $33^{16n+2}\equiv 3^{16n+2}[10]$

$109\equiv 9[10]$ ومنه $109^{8n+1}\equiv 9^{8n+1}[10]$

01 $33^{16n+2}\equiv 9[10]$ و $109^{8n+1}\equiv 9[10]$

و $11\equiv 1[10]$ و $2\times 109^{8n+1}\equiv 8[10]$

$33^{16n+2}-2\times 109^{8n+1}-11\equiv(9-8-1)[10]$

$33^{16n+2}-2\times 109^{8n+1}-11\equiv 0[10]$

3- ايجاد الأعداد الطبيعية n حيث $7\times 3^{n+1}-1\equiv 0[10]$ و $10\leq n\leq 25$

$n\equiv$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$7\times 3^{n+1}-1\equiv$	0	2	8	6	$[10]$

قيم n هي $n=4k$ حيث $k\in\mathbb{N}$

01 ومنه $10\leq n\leq 25$ ومنه $\frac{10}{4}\leq k\leq\frac{25}{4}$

أي $k\in\{3,4,5,6\}$ وعليه قيم n هي: $\{12,16,20,24\}$

4- أ) عيّنا x و y

$0<x<3$ و $0<y<9$

$$\begin{cases}A=2+1\times 3^2+2\times 3^3+x\times 3^5+x\cdot 3^6\\ A=y+7\times 9+6\times 9^2+y\times 9^3\end{cases}$$

0,5 أي
$$\begin{cases}A=65+972x\\ A=549+730y\end{cases}$$

$972x-730y=484$

اذا كان $x=1$ فإن $y\notin\mathbb{N}$

اذا كان $x=2$ فإن $y=2$

$(x;y)=(2;2)$

0,25 ب- $A=2009$

0,25 ج- $A=\overline{5600}^{7}$

التمرين الثاني (04 نقط)

1- أ) نتحقق أن:

$$z'=\frac{i(z+1-i)}{z+2}$$

0,25
$$z'=\frac{iz+i+1}{z+2}=\frac{i\left(z+1+\frac{1}{i}\right)}{z+2}$$

$$z'=\frac{i(z+1-i)}{z+2}$$

ب- M نقطة تنتمي إلى محور $[AB]$ معناه $AM=BM$

$$|z'|=\left|\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right|$$

$$|z'|=\frac{|i||z+1-i|}{|z+2|}$$

0,5 ومنه
$$|z'|=\frac{|z-(-1+i)|}{|z-(-2)|}$$

أي $OM'=\frac{BM}{AM}=1$

M' تنتمي إلى الدائرة (C) مركزها "O" و $R=1$

ج- طبيعة (E)

z' تخيلي صرف معناه $\arg(z') = \frac{\pi}{2} + \pi k$

ومنه $\arg\left(\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\arg(i) + \arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right) = \pi/2 + \pi k$

0,5 $\arg\left[\frac{z-(-1+i)}{z-(-2)}\right] = \pi k$

وعليه $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \pi k$

$(E) = (AB) - \{A, B\}$

2) أ- نتحقق أن $z' - i = \frac{1-i}{z+2}$

$z' - i = \frac{i(z+1-i)}{z+2} - i$

0,25 $z' - i = \frac{1-i}{z+2}$

ب- الاستنتاج

$|z' - i| = \left|\frac{1-i}{z+2}\right|$ * ومنه $IM' = \frac{\sqrt{2}}{AM}$

0,25 أي $IM' \times AM = \sqrt{2}$

$\arg(z' - i) = \arg\left(\frac{1-i}{z+2}\right)$ *

أي $(\vec{u}, \overrightarrow{IM'}) = -\frac{\pi}{4} - (\vec{u}, \overrightarrow{AM})$

0,5 $(\vec{u}, \overrightarrow{IM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = -\pi/4 \; [2\pi]$

ج-

M نقطة من دائرة (Γ) ذات

0,5 المركز A وطول نصف القطر 1 معناه

$AM = 1$

M' تنتمي إلى مجموعة يطلب

تعيينها:

$IM' \times AM = \sqrt{2}$ نجد $IM' = \sqrt{2}$

وعليه M' تنتمي إلى دائرة مركزها I و $R = \sqrt{2}$

أ- تبيان أن F تنتمي إلى (Γ) و

نبين أن $(\vec{u}, \overrightarrow{AF}) = \frac{\pi}{3} \; [2\pi]$

0,25 • F نقطة من (Γ) نبين $AF = 1$

$AF = |z_F - z_A| = 1$

ومنه $F \in (\Gamma)$

• $(\vec{u}, \overrightarrow{AF}) = \arg(z_F - z_A)$

$= \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \; [2\pi]$

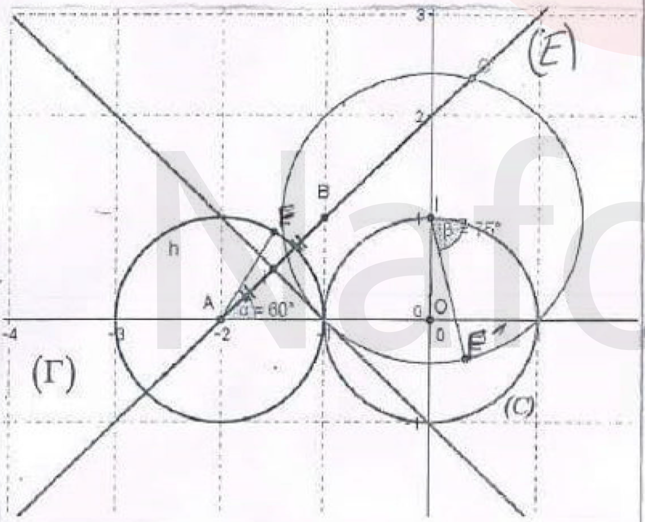
ب- انشاء النقطة F' حيث

0,5 $z_{F'} - i = \frac{1-i}{z_F + 2}$

لدينا من السؤال ②:

$FF' = \sqrt{2}$ و $(\vec{u}, \overrightarrow{IF'}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \; [2\pi]$

أي $(\vec{u}, \overrightarrow{IF'}) = -\frac{7\pi}{12} \; [2\pi]$

0,5 

التمرين الثالث (04 نقاط)

1 _ $n\in\mathbb{N}$; $P(n): 0<U_n<1/2$

$P(0)$: $0<U_0<1/2$ محققة.

نفرض $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ونبين صحة $P(n+1)$

لدينا: $n\in\mathbb{N}$: $0<U_n<1/2$

نضرب في 2:

$0<2U_n<1$

ومنه

0,5 $1<2U_n+1<2$

$\frac{1}{2}<\frac{1}{2U_n+1}<1$

ومنه $0<1-\frac{1}{2U_n+1}<\frac{1}{2}$

أي

$0<U_{n+1}<1$

$P(n+1)$ صحيحة وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

2- أ) $U_{n+1}-U_n=1-\frac{1}{2U_n+1}-U_n$

$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n-2U_n^2}{2U_n+1}$

0,25 $U_{n+1}-U_n=\frac{U_n(1-2U_n)}{2U_n+1}$

اتجاه تغير (U_n) :

لدينا مما سبق من أجل $n\in\mathbb{N}$; $0<U_n<\frac{1}{2}$ يعني $U_n>0$ و $2U_n+1>0$

و $0<1-2U_n<1$

0,25 وعليه $U_{n+1}-U_n>0$

(U_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

ب/ بما أن (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأعلى بالعدد $1/2$ فهي متقاربة.

0,5

نهاية (U_n).

$\lim U_{n+1}=\lim U_n=l$ / $l\in\mathbb{R}$

$l=1-\frac{1}{2l+1}$

$2l^2-l=0$

$l=1/2$ أو $l=0$

0,5 بما أن (U_n) متزايدة تماما فإن $l=\frac{1}{2}$

3/ أ-

$v_{n+1}=10v_n$

(v_n) متتالية هندسية أساسها 10

0,5 وحدها الأول $v_0=-\frac{1}{3}$.

0,25 ب- $v_n=v_0\times q^n=\left(-\frac{1}{3}\right)10^n$

لدينا: $v_n=\frac{5^n U_n}{2U_n-1}$ نجد

$U_n=\frac{v_n}{2v_n-5^n}=\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)10^n}{2\left(-\frac{1}{3}\right)10^n-5^n}$

أي

0,5 $U_n=\frac{10^n}{2\times10^n+3\cdot5^n}=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}$

0,25 $\lim U_n=\lim\frac{2^n}{2^n\left[2+\frac{3}{2^n}\right]}=\frac{1}{2}$

حساب S_n بدلالة n:

$S_n=\frac{1}{U_0}+\frac{1}{U_1}+\dots+\frac{1}{U_n}$

$\frac{1}{U_n}=\frac{2^{n+1}+3}{2^n}=2+\frac{3}{2^n}$

0,5 $S_n=\left(2+\frac{3}{2^0}\right)+\left(2+\frac{3}{2^1}\right)+\dots+\left(2+\frac{3}{2^n}\right)$

$S_n=2(n+1)+3\left(\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\dots+\frac{1}{2^n}\right)$

$S_n=2(n+1)+3\left[\frac{(1/2)^{n+1}-1}{1/2-1}\right]$

$S_n=2(n+1)-6\left[(1/2)^{n+1}-1\right]$

التمرين الرابع (08 نقاط)

1) أ) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ 0,25

بين أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x - \frac{x^2+1}{e^{-1}\times e^x}\right]$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x - \underbrace{\frac{x^2}{e^{-1}e^x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{e^{-1}e^x}}_{\to 0}\right]$

0,25 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

ب- f قابلة للاشتقاق على IR ومن أجل كل x من IR:

0,5 $f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$

جـ- من أجل كل x من IR: $f'(x) > 0$ 0,25

وعليه f متزايدة تماما على IR

x	$-\infty$	$+\infty$
0,5 $f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} -(x^2+1)e^{-x+1} = 0$

(Δ) مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $(+\infty)$

• الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

$f(x) - y = -(x^2+1)e^{-x+1} < 0$

(C_f) يقع تحت (Δ) من أجل $x \in IR$

3- $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]1,8;1,9[$

0,5 $f(1,9) \simeq 0,03$ / $f(1,8) \simeq -0,11$

f مستمرة ورتيبة تماما على $[1,8;1,9]$

و $f(1,8)\times f(1,9) < 0$ حسب مبرهنة

القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا

وحيدا α من $]1,8;1,9[$.

4. 0,5 $(T): y = x - e$

5- f' دالة قابلة للاشتقاق على IR ومن أجل كل x من IR

$f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$

$f''(x) = 0$ تعني $(x=1)$ أو $(x=3)$

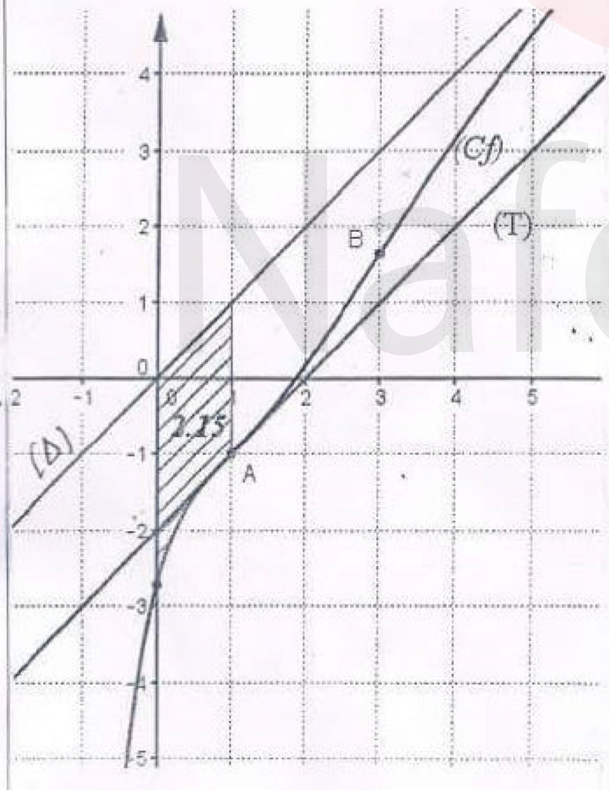
x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

01 $f''(x)$ تنعدم عند كل $x=1$ و $x=3$ مغيرة إشارتها مرتين

$A(1,-1)$ و $B(3, 3-10e^{-2})$ نقطتا انعطاف لـ (C_f).

6- $f(0) = -e$ ، $f(3) = 3 - 10e^{-2}$

01



7- المناقشة البيانية:

$(E) \ldots\ f(x) = x + m$

حلول المعادلة $f(x)=x+m$

هي فواصل نقط تقاطع المنحنى

(C_f) مع المستقيم معادلته

$y=x+m$ الموازي لكل من (T) 0,5

و (Δ)

1. اذا كان $m \in]-\infty,-e[$: المعادلة (E) تقبل حلاً وحيداً سالباً.

• اذا كان $m=-e$ المعادلة (E) تقبل حلاً وحيداً معدوماً.

• اذا كان $m \in]-e,0[$: المعادلة (E) تقبل حلاً وحيداً موجباً

• اذا كان $m \in [0,+\infty[$ المعادلة (E) ليس لها حل.

- الجزء II -

1) أ) الدالة G قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$G'(x) = x e^{-x+1}$ 0,5

وعليه G دالة أصلية للدالة $x \mapsto x e^{-x+1}$ على $\mathbb{R}$.

ب) $I_1 = \int_0^1 x e^{-x+1} dx$

$I_1 = [G(x)]_0^1$ 0,25

$I_1 = -2 + e$

2) أ) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x+1} dx$

نضع $U(x) = x^{n+1}$ ومنه $U'(x) = (n+1)x^n$ 0,5

$V'(x) = e^{-x+1}$ ومنه $V(x) = -e^{-x+1}$

$I_{n+1} = [-x^{n+1} e^{-x+1}]_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$

$I_{n+1} = -1 + (n+1) I_n$

ب) حساب I_2

$I_2 = -1 + 2 I_1$

$I_2 = -1 + 2(e-2)$ 0,25

$I_2 = 2e - 5$

3- $S = \int_0^1 [y - f(x)] dx$

$S = \int_0^1 (x^2+1) e^{-x+1} dx$

$S = \int_0^1 x^2 e^{-x+1} dx + \int_0^1 e^{-x+1} dx$ 0,5

$S = I_2 + [-e^{-x+1}]_0^1$

$S = I_2 + (-1 + e)$

$S = 2e - 5 - 1 + e = (3e - 6)\, cm^2$

$S = (3e-6)\, cm^2 = 2,15\, cm^2$ 0,5

- انتهى -